DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Ce problème comporte de nombreuses questions indépendantes

PARTIE 1

On définit une application f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \ln x$ (ln désigne le logarithme népérien).

1.1. Montrer que f est indéfiniment dérivable. Étudier le signe de $g(x) = e^{x} f''(x)$. Dresser le tableau de variation de f. On notera x_1 et x_2 les réels tels que $f'(x_1) = 0$ et $f''(x_2) = 0$.

1.2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de x_1 et $f(x_1)$, en indiquant la méthode et le moyen de calcul utilisés.

1.3. Tracer la représentation graphique de f.

PARTIE 2

On définit deux suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ par :

$$u_n = -\ln(n) + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_{n+1} - u_n .$$

2.1. Donner un équivalent simple de v_n pour n infini, et prouver que la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge; en déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge aussi. On notera C la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

2.2. Prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2,\ \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{p^2} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{dt}{t^2}.$$

2.3. En déduire que :

$$\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

2.4. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs tels que :

(i) $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$

(ii) la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge;

Démontrer que :

$$\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{+\infty} b_p .$$

(On pourra poser $b_p = a_p(1 + \varepsilon_p)$ avec $\lim_{p \to +\infty} \varepsilon_p = 0$ et prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \varepsilon_p\right) \Big/ \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p\right)\right] = 0.)$$

2.5. Déduire des questions précédentes que : $u_n - C \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

2.6. On définit deux suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ par :

$$x_n = -\ln(n) + \frac{1}{2n} + \sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad y_n = x_{n+1} - x_n .$$

En s'inspirant du raisonnement utilisé pour les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$, trouver un équivalent de $x_n - C$ pour n infini.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$z_n = \sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{1}{p} - \ln(n) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2}.$$

Prouver que $C = z_n + \dfrac{\alpha_n}{n^2}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

2.7. Calculer à 10^{-5} près une valeur approchée de z_6.

PARTIE 3

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, $J = \displaystyle\int_0^{1} f(t)\,dt$, $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$, f étant définie en partie 1.

3.1. Justifier l'existence de J.

3.2. Par une intégration par parties, montrer que $J = \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$.

3.3. Justifier l'existence de K.

3.4. Par une intégration par parties, montrer que $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

3.5. Justifier l'existence de I et la relation $I = J + K$.

PARTIE 4

4.1. Prouver que : $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

4.2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \leqslant n$, $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

4.3. Prouver que : $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$ $x - x^2 \leqslant \ln(1+x)$.

4.4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left[0, \dfrac{n}{2}\right]$, $e^{-t-\frac{t^2}{n}} \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

4.5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{t^2}{n} \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}}$.

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4,\ \forall t \in [0, \sqrt{n}],\ e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

4.6. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4,\quad \forall t \in [0, n],\quad e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}.$$

PARTIE 5

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$J_n = \int_0^1 \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1}{t}\, dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\, dt.$$

5.1. Justifier l'existence de J_n et de K_n.

5.2. Montrer que : $J_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1}{t}\, dt - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\, dt + \int_1^n \frac{1}{t}\, dt.$

5.3. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall u \in \mathbb{R}^*,\ \frac{(1 - u)^n - 1}{u} = - \sum_{p=0}^{p=n-1} (1 - u)^p.$$

5.4. Montrer que : $J_n + K_n = \ln(n) - \displaystyle\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} = - u_n.$

(u_n est défini en partie 2).

PARTIE 6

6.1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4,\ 0 \leqslant J - J_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 te^{-t}\, dt, \qquad \text{et que : } \lim_{n \to +\infty} J_n = J.$$

6.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant 4,\ \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \frac{1}{n}\int_1^n te^{-t}\, dt \leqslant K_n \leqslant \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} K_n = K$.

6.3. Déduire des questions et parties précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt = - C.$$

6.4. Calculer :

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t}\, dt.$$
